Est-il possible de mesurer le risque des marchés financiers ?

Pierre Vallois

Institut de Mathématiques Élie Cartan Nancy
Université Henri Poincaré

Colloque : Les mathématiques dans la société
20 novembre 2010, Hôtel de Ville de Nancy

Plan de l'exposé

- Introduction
- Modèles probabilistes versus modèles déterministes
- Eléments de modélisation financière
- Conclusions

INTRODUCTION

Avant la Seconde Guerre mondiale, l'enseignement de la finance reposait de manière esentielle sur ses aspects juridiques et sur des calculs d'actualisation.

Dès 1970 la finance est devenue une théorie économique argumentée avec bien sûr, des écoles de pensée distinctes et des controverses. Ont ainsi vu le jour la théorie des marchés efficients, la théorie de sélection de portefeuilles et l'analyse du risque. L'école américaine a joué un rôle majeur mais l'école française également. On peut citer Arrow, Debreu, Allais, Lintner, Markowitz, Modigliani, Sharp, Tobin, ...

En l'espace de 20 ans, à la suite de politiques de déréglementation, d'innovations technologiques dans le domaine de l'information et des télécommunications, de nouveaux instruments financiers ont vu le jour. On peut mentionner les futures, les options, les produits dérivés, le risque de crédit, ...

Comme l'a souligné R. Merton, prix Nobel d'économie, ces nouveaux actifs financiers n'auraient jamais pu être introduits sans l'apport conjoint de la **théorie économique et des mathématiques**.

Le secteur de la finance de marché est fortement demandeur d'ingénieurs mathématiciens.

1. MODÈLES PROBABILISTES VERSUS MODÈLES DÉTERMINISTES

Les modèles probabilistes sont très utilisés car ils permettent de modéliser l'incertain, l'inconnu.

Les modèles déterministes sont intensivement utilisés en physique. Prenons l'exemple de la mécanique : le mouvement d'un projectile est entièrement déterminé une fois que l'on connait :

1. sa dynamique (les champs de force auxquels il est soumis), ici la gravitation,
2. les conditions initiales : la position et la vitesse.

Mais en pratique il est rarement possible de mesurer avec précision les conditions initiales. Certains systèmes sont très sensibles à de petites variations de ces paramètres de départ.

Ce qui conduit parfois à envisager des modèles mixtes : une dynamique déterministe et des paramètres initiaux aléatoires. Cette idée est utilisée dans certains modèles statistiques pour prendre en compte l'effet individuel.

Signalons par ailleurs le résultat au premier abord surprenant : dans une situation compétitive, un comportement aléatoire et donc imprévisible peut être la meilleure attitude. En effet un choix déterministe peut être découvert s'il est systématiquement choisi.

2. ELÉMENTS DE MODÉLISATION FINANCIÈRE

2.1 Actualisation

1) 100 euros placés aujourd'hui, au taux annuel de 5% auront dans un an une valeur de

$$100 \times (1 + 0,05) = 100 \times 1,05 = 105 \textit{ euros}.$$

2) Considérons un produit financier qui libère un flux (fixe) de 100 euros dans un an. Admettons l'existence sur le marché d'un taux de 5% annuels. La **Valeur Actuelle Nette** de ce produit (aujourd'hui) est

$$V := 100 \times \frac{1}{1 + 0,05} = \frac{100}{105} \approx 95,238 \textit{ euros}.$$

2.2 Opportunité d'arbitrage

Une **opportunité d'arbitrage** est une stratégie, un portefeuille qui permet de gagner de l'argent avec une mise de fond nulle.

Un exemple d'arbitrage. Supposons qu'un actif vaut aujourd'hui 100 euros et qu' à une date T, il puisse être côté 105 ou 108 euros. Supposons par ailleurs que le loyer de l'argent sur la période considérée soit de 5%.

1. A la date $t = 0$ on achète à crédit un actif.
2. A la date T la dette est de $100 \times 1,05 = 105$ euros. En revanche l'actif vaut 105 euros ou 108 euros.

2.3 Les options d'achat

On suppose :

- A la date $t = 0$, un actif risqué vaut 100 euros
- A la date $T = 1$, cet actif peut prendre deux valeurs 98 ou 108 euros
- Le loyer de l'argent, pour la période considérée, est de 5%.

Achat d'une option d'achat (call) :

- paiment à la date $t = 0$ d'une prime C_0.
- Achat au prix fixé à l'avance $K = 101$ euros à la maturité, si l'exercice est profitable

Cas d'un investisseur achetant 10 000 calls.

1. Paiment à $t = 0$ de $10\,000 \times C_0$ au vendeur.
2. Cas de la hausse ($S = 108$) : gain de

$$10\,000 \times (S - K) = 10\,000 \times (108 - 101) = 70\,000 \textit{ euros}.$$

3. Cas de la baisse : gain nul.

D'où la nécessité pour le vendeur des calls de mettre en place une **stratégie de couverture**.

Une stratégie de couverture :

Achat de 7000 parts d'actifs et emprunt de 653 333 euros.

A l'échéance :

1. cas de la hausse ($S = 108$) :

$$V = 7000 \times 108 - 653\ 333 \times 1,05 = 756\ 000 - 686\ 000 = 70\ 000.$$

2. cas de la baisse ($S = 98$) :

$$V = 7000 \times 98 - 653\ 333 \times 1,05 = 686\ 000 - 686\ 000 = 0.$$

Conséquences :

1. Ce portefeuille a une valeur initiale de :

$$V_0 = 7000 \times 100 - 653\ 333 = 700\ 000 - 653\ 333 = 46\ 667 \ \textit{euros}.$$

2. Ainsi le prix d'un call est : $\dfrac{46\ 667}{10\ 000} = 4,67$ euros.
3. Notons le très fort **effet de levier** : avec un investissement initial de 46 667 euros, l'acheteur des 10 000 calls aura :
   - 70 000 euros, lorsque l'actif prend la valeur 108;
   - 0 euro, lorsque l'actif prend la valeur 98.

2.3 Les options de vente

On considère le cas d'un industriel qui produit des pièces destinées à être vendues sur le marché américain.

- Il lui faut un délai de trois mois pour une commande de 10 000 pièces.
- Le coût de production d'une pièce est de 7 euros.
- Aujourd'hui le taux de change est de

1 euro = 1,3 dollar

Ainsi s'il vendait aujourd'hui sa production il aurait :

$$10\ 000 \times 7 = 70\ 000\ \textit{euros} = 70\ 000 \times 1,3 = 91\ 000\ \textit{dollars}.$$

On considère deux cas de figure : dans trois mois le taux de change euro/dollar est

1 euro = 1,4 dollar ou **1 euro = 1,25 dollar**

Dans le premier cas pour une commande de 91 000 dollars, le manque à gagner en euros est :

$$70\ 000 - \frac{91\ 000}{1,4} = 70\ 000 - 65\ 000 = 5000 \textit{ euros}.$$

Dans le second cas la situation est profitable à l'industriel.

Pour se protéger contre une hausse du taux euro/dollar, l'industriel peut acheter 70 000 **options de ventes** (puts) avec prix d'exercice 1,3 (le taux de change aujourd'hui) et échéance trois mois.

- Paiment d'une prime de 70 000P_0.
- Trois mois plus tard, lorsque un euro vaut 1,4 dollar, en exerçant l'option de vente le producteur recevra exactement les 70 000 euros attendus.
- Si le cours de l'euro baisse, l'option ne sera pas exercée mais c'est sans importance.

2.4 Modélisation probabiliste

La méthode pour calculer le prix d'une option (ou d'un actif libérant un flux *variable* à une date fixée à l'avance (la *maturité*)) est donné par la procédure suivante :

1. On détermine tous les résultats possibles.
2. On mesure chaque éventualité avec un poids, une **probabilité**.
3. On fait la moyenne ainsi pondérée.
4. On actualise.

Le modèle probabiliste le plus utilisé est celui de Merton, Black et Scholes et date de 1973.

3. CONCLUSIONS

- **LE** modèle de Black et Scholes est adopté par tout le monde mais :
  - il est faux statistiquement.
  - Il est utilisé d'une manière incohérente (cf la mesure de la volatilité).
  - Il manque d'alternative crédible même si de nombreuses adaptations ont été proposées.
- Connaitre le risque et le modéliser ne suffit pas à le maitriser.
- Un modèle représente le réel et ne peut s'y substituer.
- Le financier doit laisser une distance entre la théorie et le monde réel, ce qui est le propre de ceux qui ont été formés par la recherche.

Bibliographie

- BOULEAU N. : *Martingales et marchés financiers*. Odile Jacob (1998).
- BLACK F. et SCHOLES M. : *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economy, 81, pp 637-654 (1973).
- JOUINI E. : *Le prix des options financières*. L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI (2002).
- PAGES G., BOUZITAT C., CARRANCE F. et PETIT F. *En passant par hasard... Les probabilités de tous les jours*. Vuibert. Troisième Edition (2003).