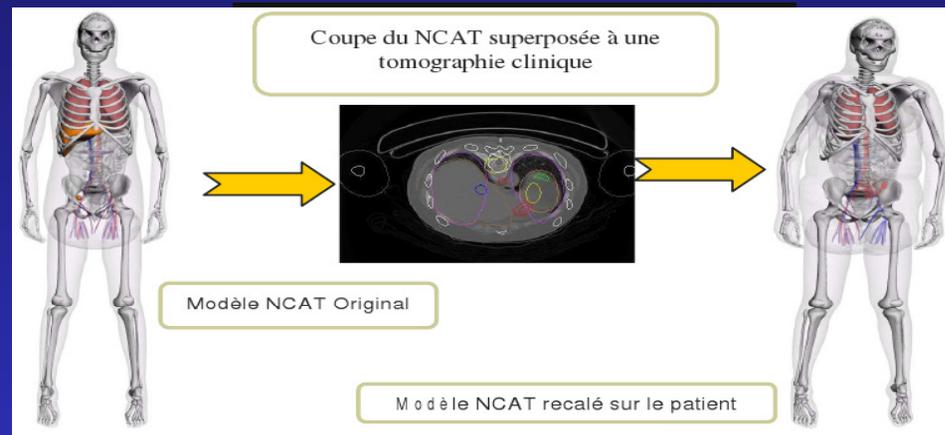


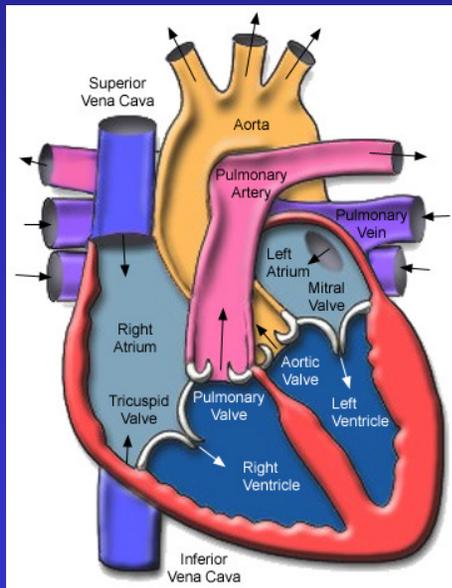
# Mathématiques pour l'aide à l'analyse d'images cardiaques



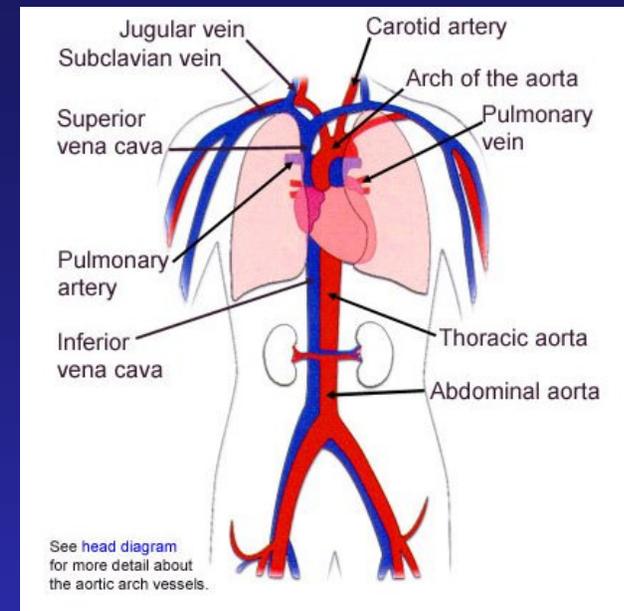
Jérôme Pousin, ICJ, UMR CNRS #5585,  
Villeurbanne, France  
[Jerome.pousin@insa-lyon.fr](mailto:Jerome.pousin@insa-lyon.fr)

# Contexte Médical

- Développer un modèle du coeur  
Aide au diagnostique

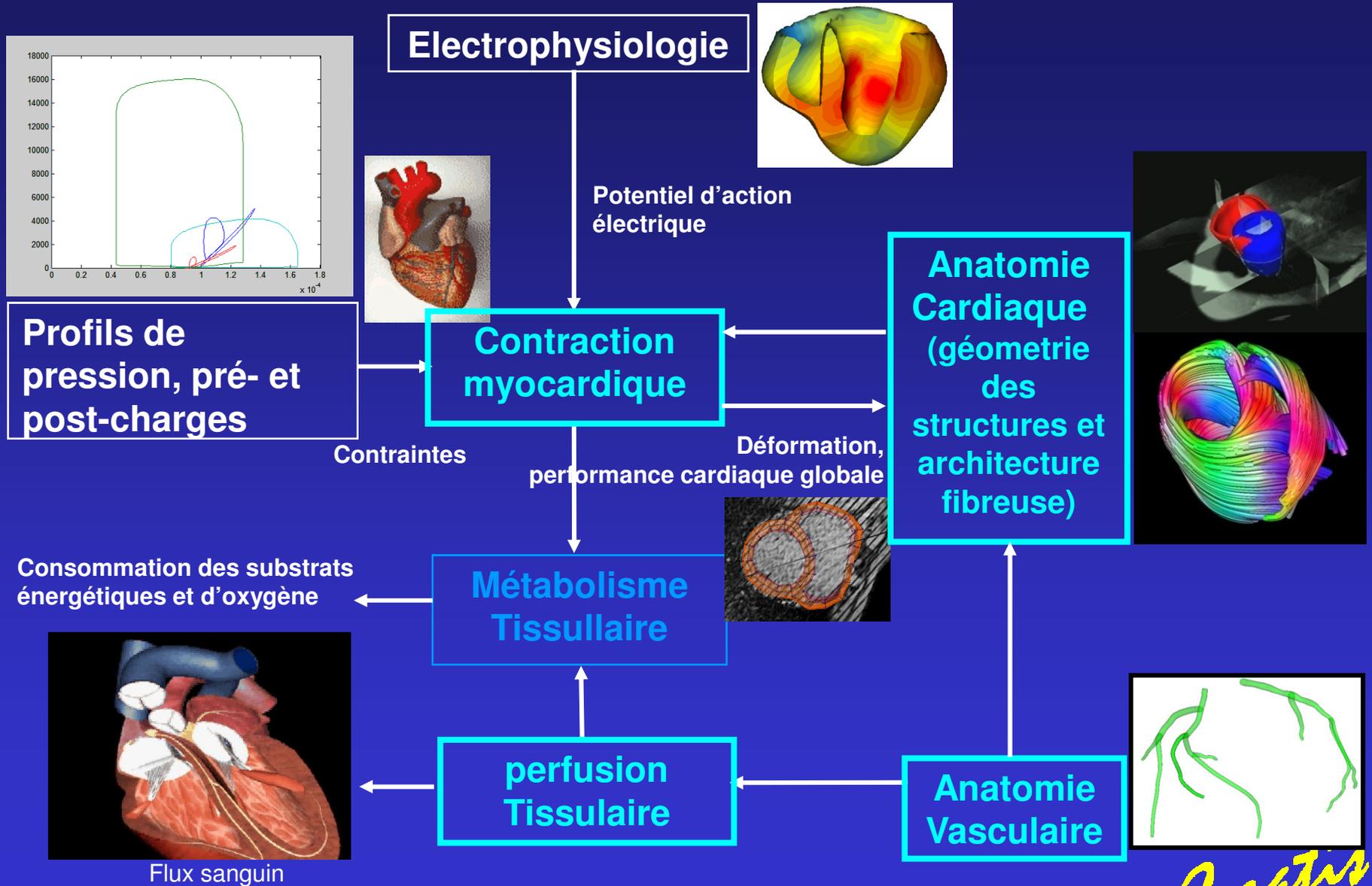


- Les particularités
  - Coeur difficile d'accès
  - Organe en mouvement permanent
  - Multiples facettes fonctionnelles: mouvement, perfusion, métabolisme, électrophysiologie



*Creatis*

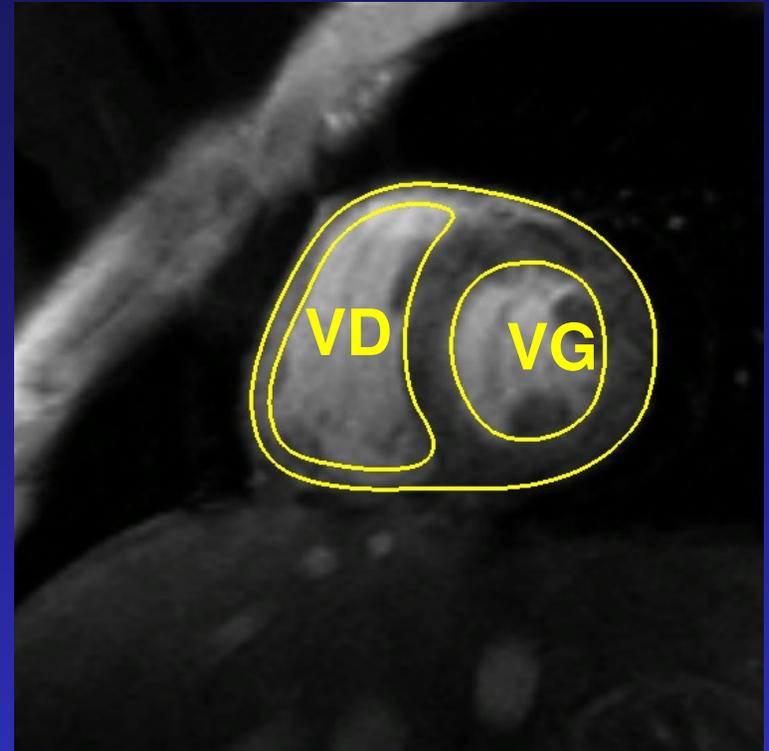
# Systeme cardio-vasculaire



*Creativis*

# Objectifs

- **Extraire l'anatomie du coeur:**
  - Segmentation avec des gabarits élastiques déformables
- **Minimisation de fonctionnelles**

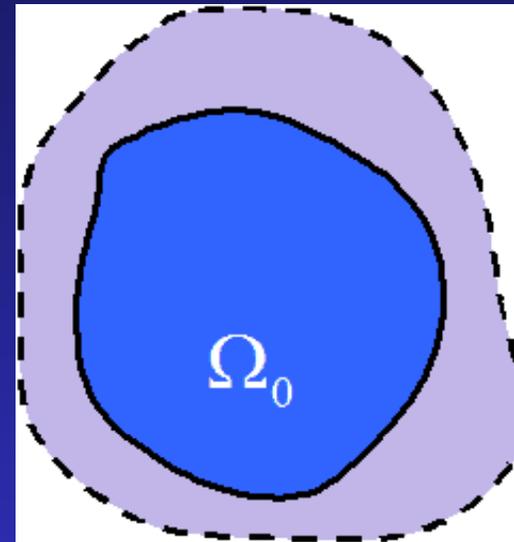
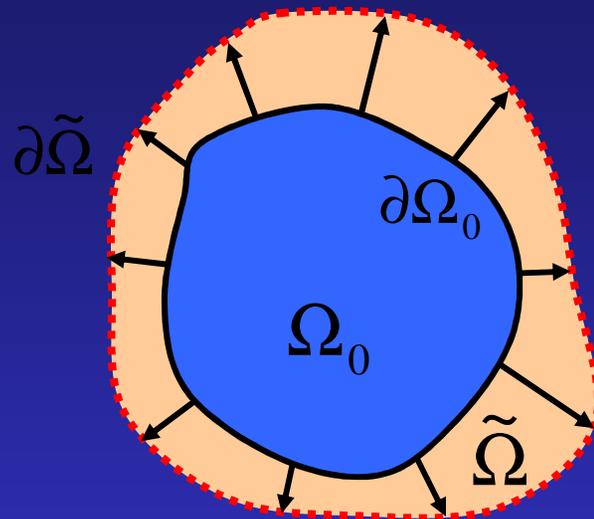


- **Difficultés**
  - Géométrie d'acquisition imprécises
  - Problèmes sous contraintes
  - Algorithmes de résolution

# ■ Gabarit élastique déformable

[Jour. Math. Imag. Vision 2007]

## ■ Méthode itérative (linéarisation)



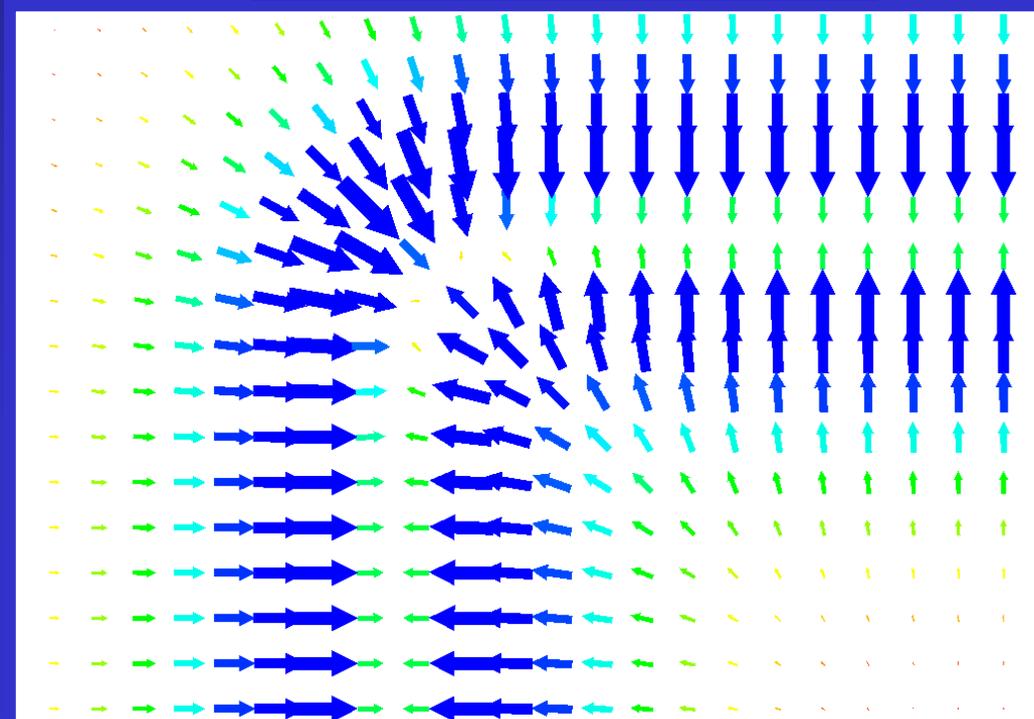
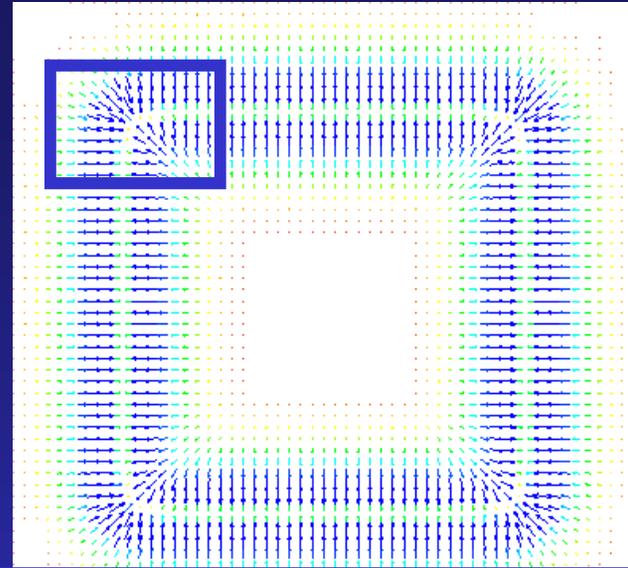
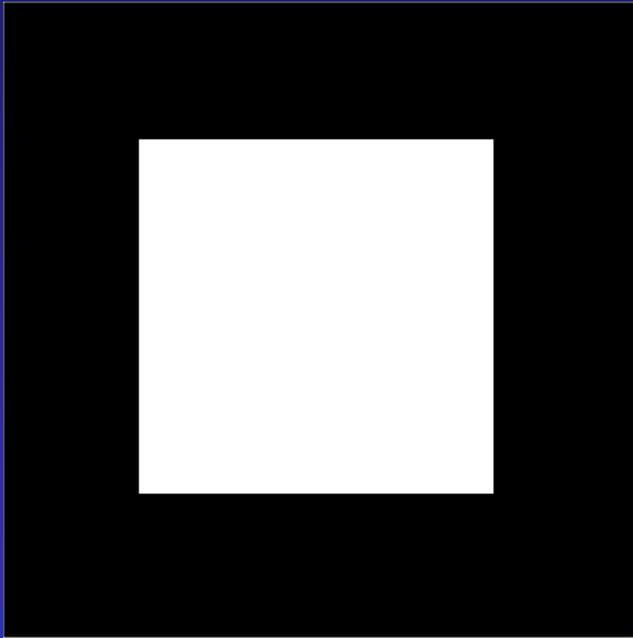
Hypothèse : faibles déplacements

$$\Omega_0 \approx \Omega_1 \approx \dots \approx \Omega_k \approx \dots \approx \Omega_n$$

*Creatis*

# ■ Calculer le champ de force issu de l'image

## ■ Exemple : cube image



## ■ Equations d'équilibre

### ■ Problème non linéaire: formulation itérative

$$E(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\zeta}^T(\mathbf{v}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, ds$$

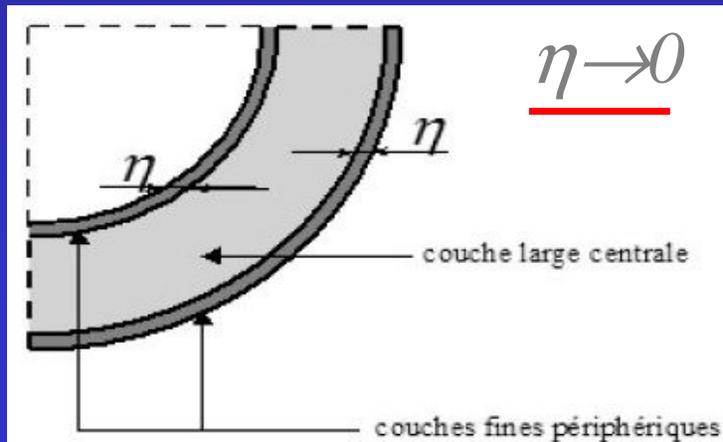
$$\begin{cases} \underline{\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} & \text{in } \Omega_0 \\ \boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{t} & \text{on } \underline{\partial\Omega_0} \end{cases}$$

$$(M1) \quad \begin{cases} \mathbf{u}^{k+1} - \Delta t \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{k+1}) = \mathbf{u}^k & \text{in } \Omega_0 \\ \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{u}^{k+1}) = \mathbf{t}(\mathbf{I} + \mathbf{u}^k) & \text{on } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

- Rigidification des termes de bord
  - Prendre en compte les couches fibreuses externes

$$M2 \quad \begin{cases} u^{k+1} - \Delta t \operatorname{div} \sigma(u^{k+1}) = u^k & \text{dans } \underline{\Omega_k} \\ \sigma_n(u^{k+1}) = t(I + u^k) & \text{sur } \underline{\partial\Omega_k} \\ \underline{\Omega_{k+1}} = (I + u^k)\Omega_k \end{cases}$$

- Direction des fibres

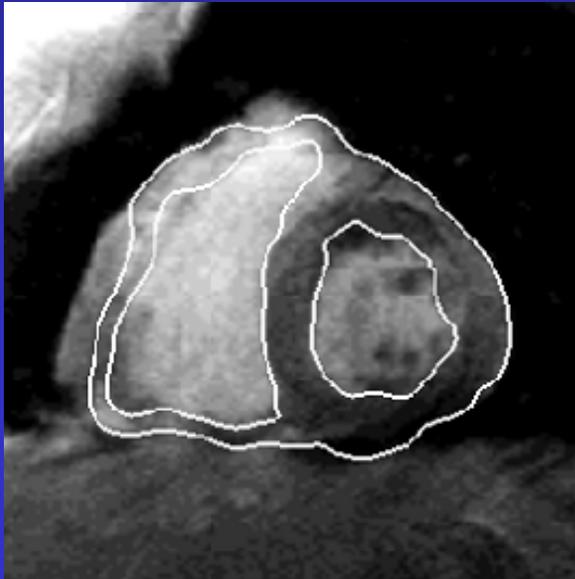


$$\sigma_n^f = \begin{pmatrix} \sigma_n^f \cdot n \\ \sigma_n^f \cdot t_1 \\ \sigma_n^f \cdot t_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \underline{2\mu_b u_n} \\ \mu_b u_{t_1} \\ \mu_b u_{t_2} \end{pmatrix}$$

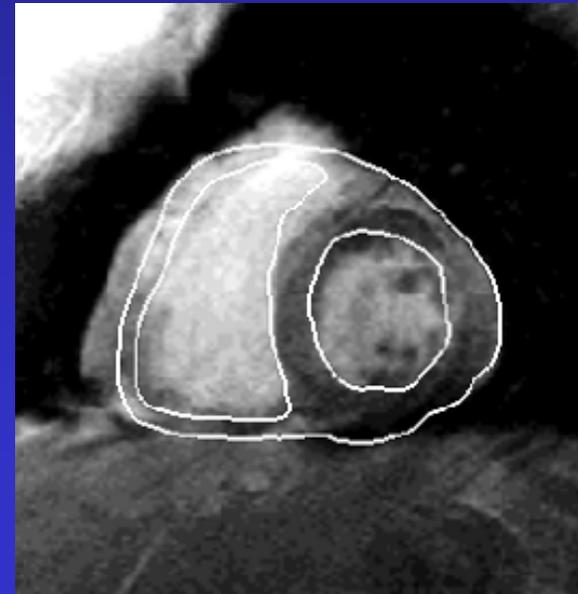
## ■ Couche extérieure fibreuse

### ■ Tenseur des contraintes

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \underbrace{d \cdot \epsilon(\mathbf{u}) d (d \otimes d)_{ij}} + \underbrace{2\mu_b \eta \epsilon_{ij}(\mathbf{u})}_{\text{pression}}$$



Sans fibres



Avec fibres

*Creatis*

## ■ Introduction de contraintes

### ■ Minimisation sous contraintes

- Fonctionnelle à minimiser

$$E(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\zeta}^T(\mathbf{v}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, ds$$

- Chercher

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} \in H^1 \\ \mathbf{t}(\mathbf{I} + \mathbf{v})|_{\partial\Omega_0} = 0 \end{array} \right.} E(\mathbf{v})$$

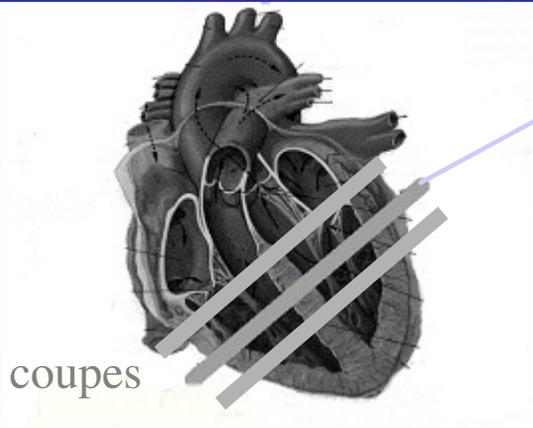
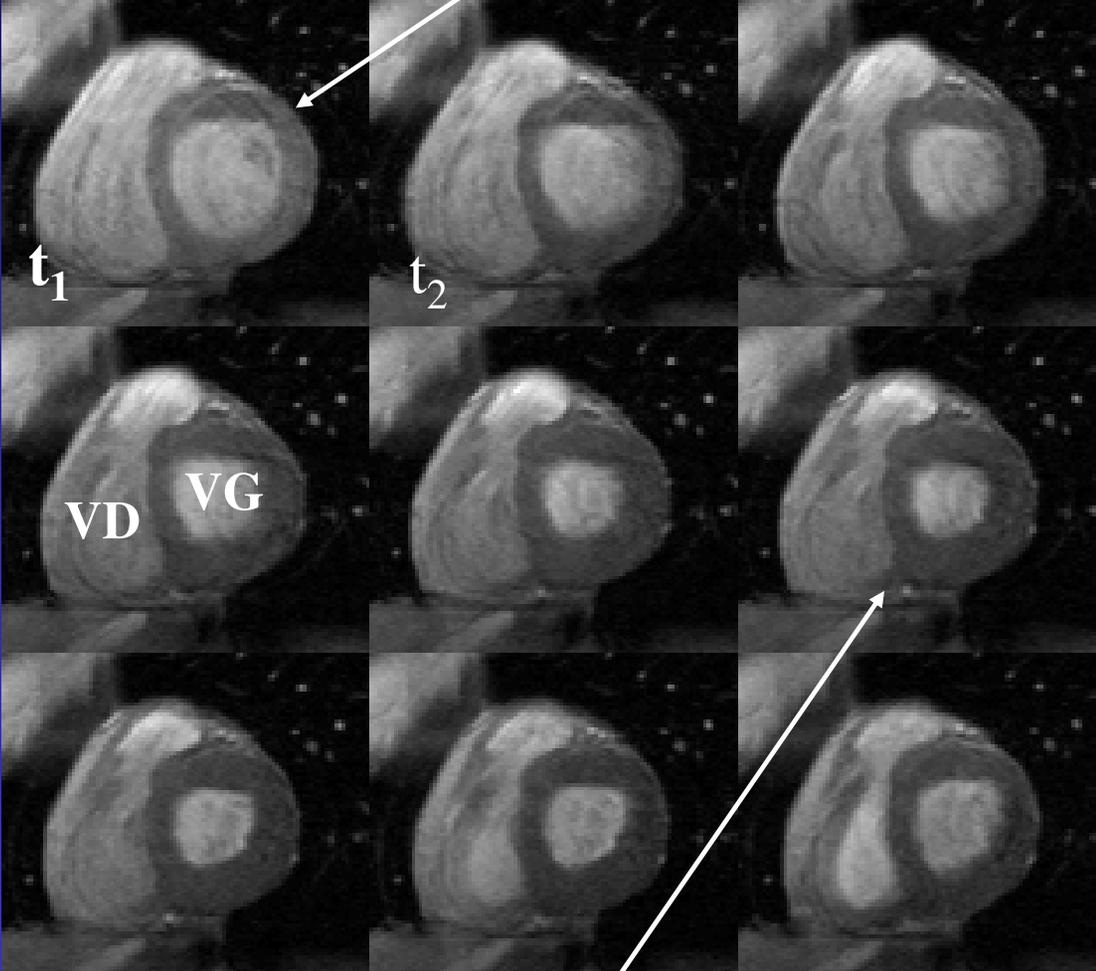
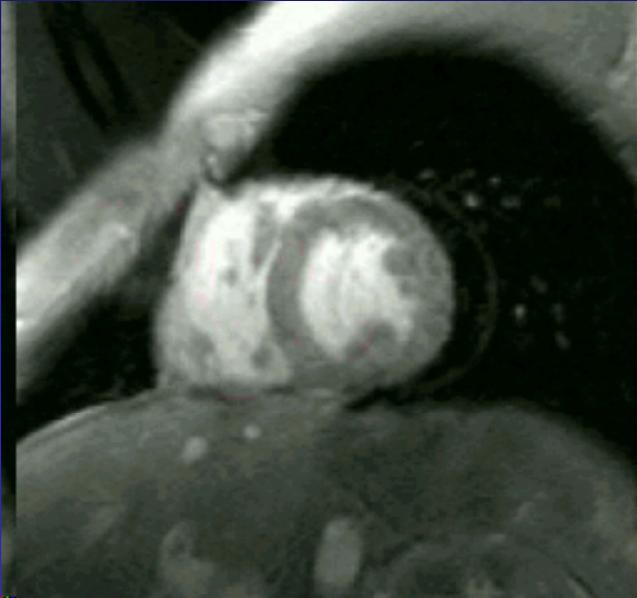
- Multiplicateur de Lagrange

Algorithme efficace

# Les données: Cine IRM

9-15 phases

Fin-diaстole



coupes

Fin-systole

*Creatis*

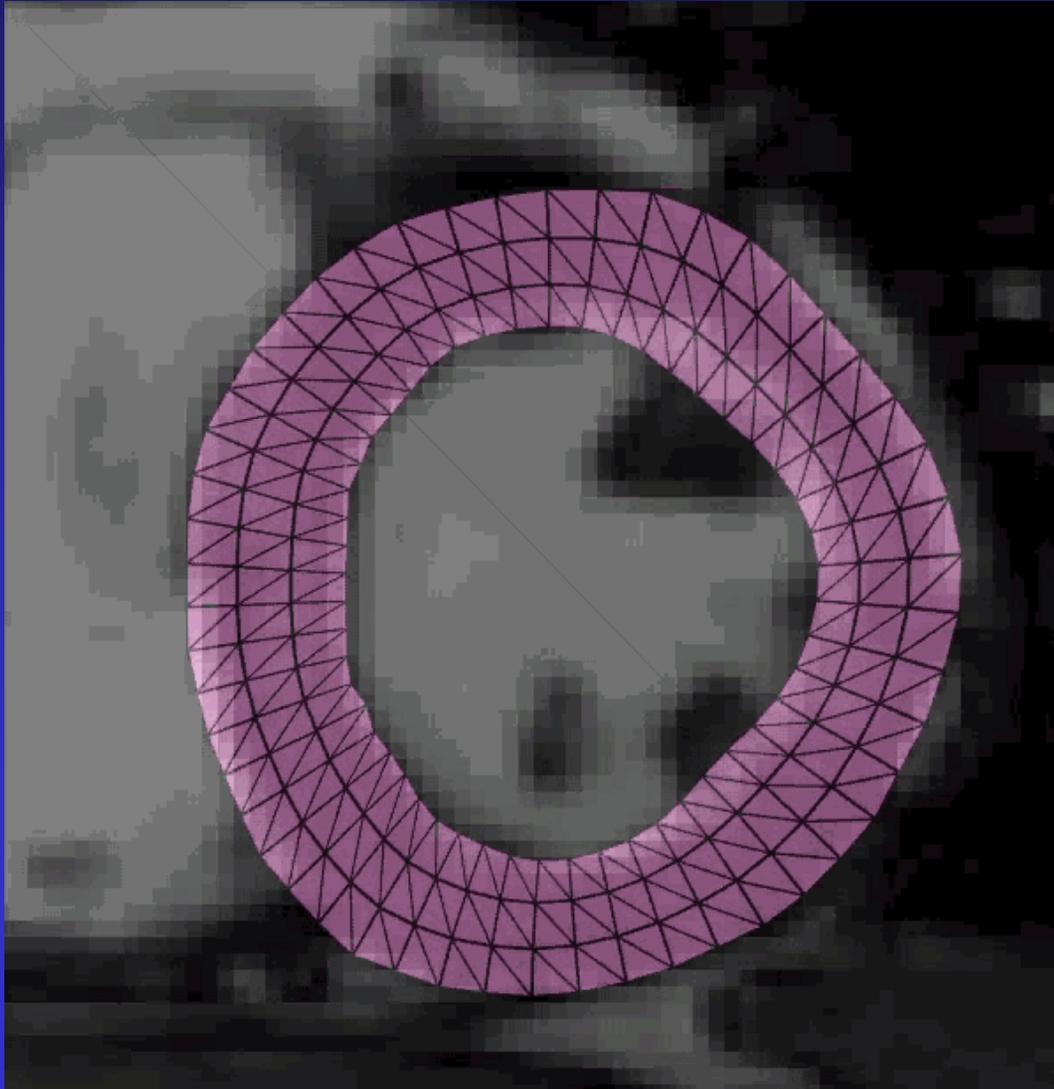
## Un problème d'interpolation temporelle

- La force image est connue en  $t_n$
- Images échantillonnées  $\rightarrow$  transformée discrète de fourier interpolation en temps des forces  $t(I+u)$

$$\text{M2} \quad \begin{cases} u^{k+1} - \Delta t \operatorname{div} \sigma(u^{k+1}) = u^k & \text{dans } \Omega_k \\ \sigma_n(u^{k+1}) = t(I + u^k) & \text{sur } \partial\Omega_k \\ \Omega_{k+1} = (I + u^k)\Omega_k \end{cases}$$

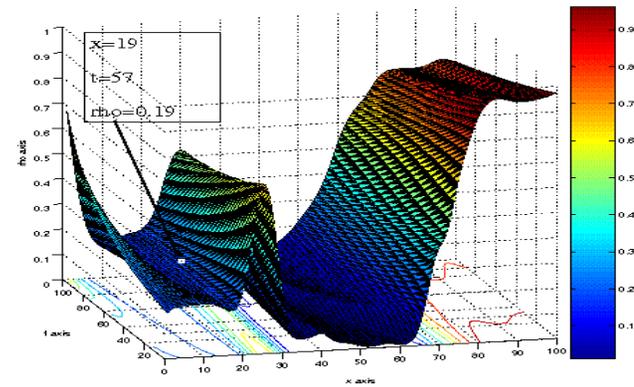
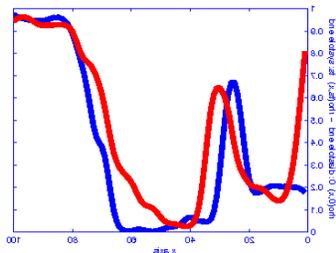
- Tronquer pour ne conserver que les termes correspondant à de faibles énergies
- Méthode de perturbation singulière sur les coefficients de l'élasticité
- Jour. Math. Mod. Nat. Phen. 2009; Medical Image Analysis 2010

## Exemple 2 D

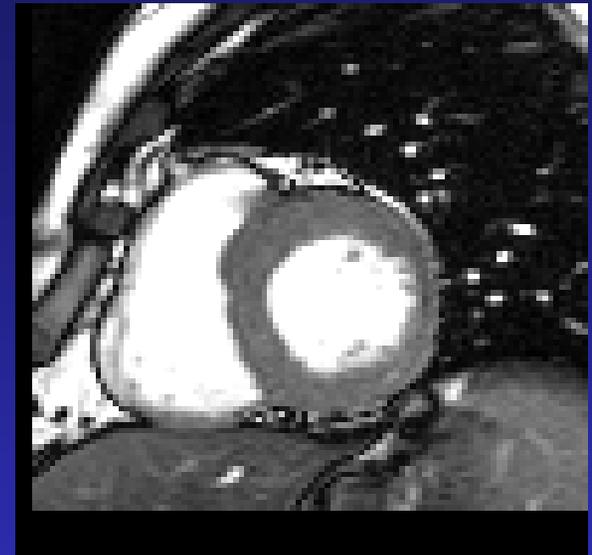
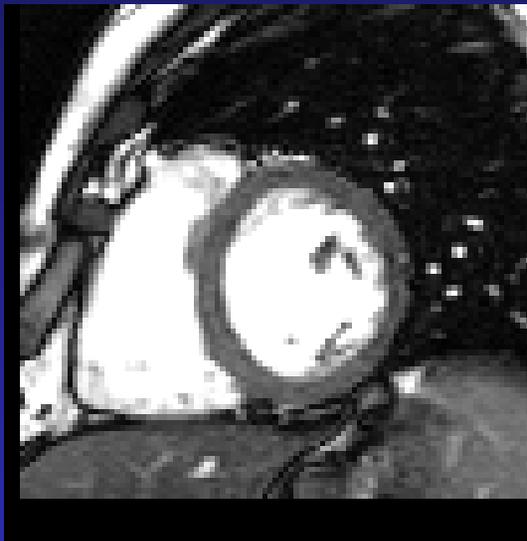


*Creativ*

# Utilisation du Transport Optimal



# LE CAS D'IMAGES BIDIMENSIONNELLES



# Conclusion

- **Imagerie dynamique:**
  - Utiliser le transport optimal d'une image vers une autre
  - Ajouter des contraintes spécifiques à chaque patient (contraintes non convexes)

2D et 3D numériquement plus difficile