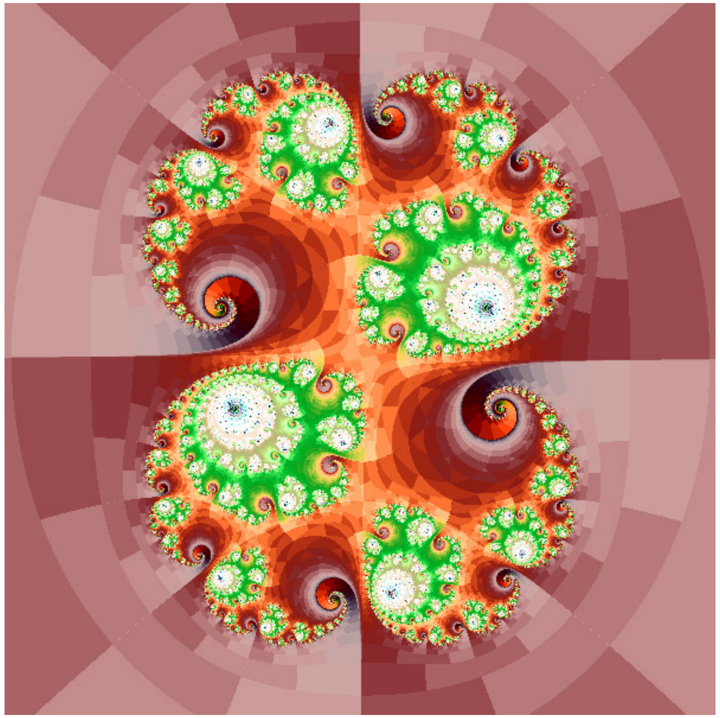
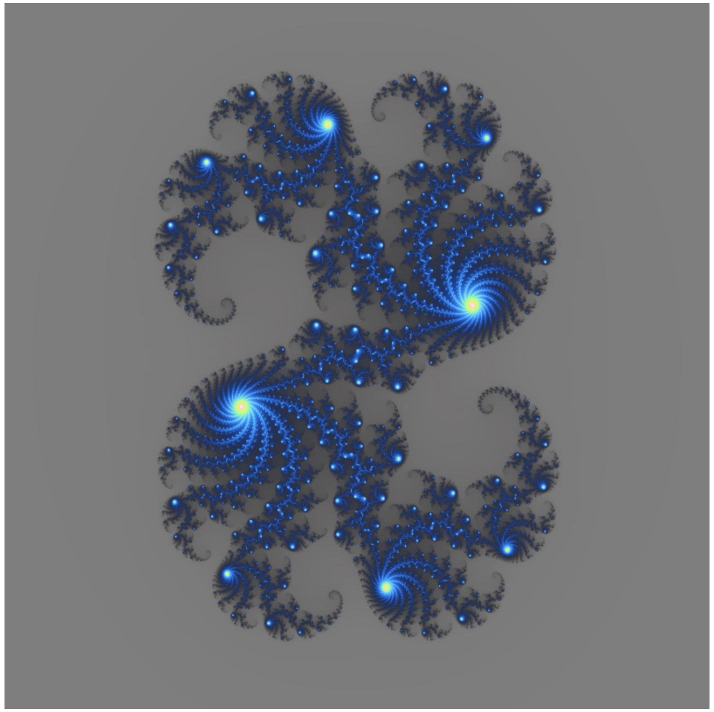
FRACTALES





continuité et dérivabililé

- Au milieu du $19^{\text{ème}}$ siècle les notions de continuité et de dérivabilité étaient bien connues des mathématiciens et physiciens de l'époque. Il restait à prouver l'existence de fonctions continues et qui ne soient dérivables en aucun point.
- On doit à Weierstrass l'existence d'une telle fonction (1872)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

$(0 < a < 1$ et $ab > 1 + 3\pi/2)$

- Une autre fonction de ce type et permettant une approche plus explicite a été réalisée à partir de la fonction continue

- $$g(x) = \begin{pmatrix} 1+x & -2 \le x \le 0 \\ 1-x & 0 \le x \le 2 \end{pmatrix}$$

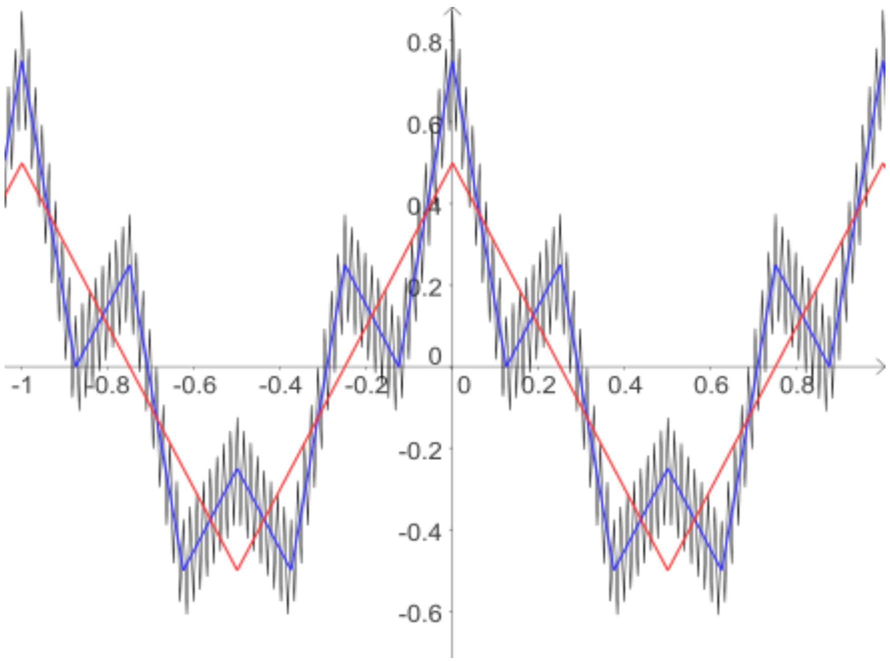
prolongée par périodicité

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{k} 2^{-n}\, g(2^{2^n} x)$$

fonction continue affine par morceaux dont la limite est une fonction continue non dérivable. C'est la courbe de Weierstrass.

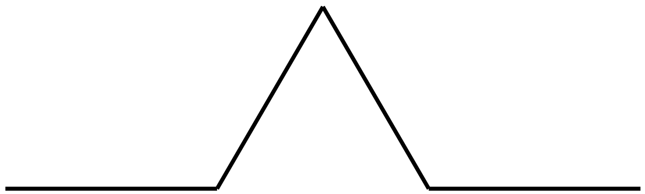
courbe de Weierstrass

(f1 rouge ; f2 bleu ; f3 gris)



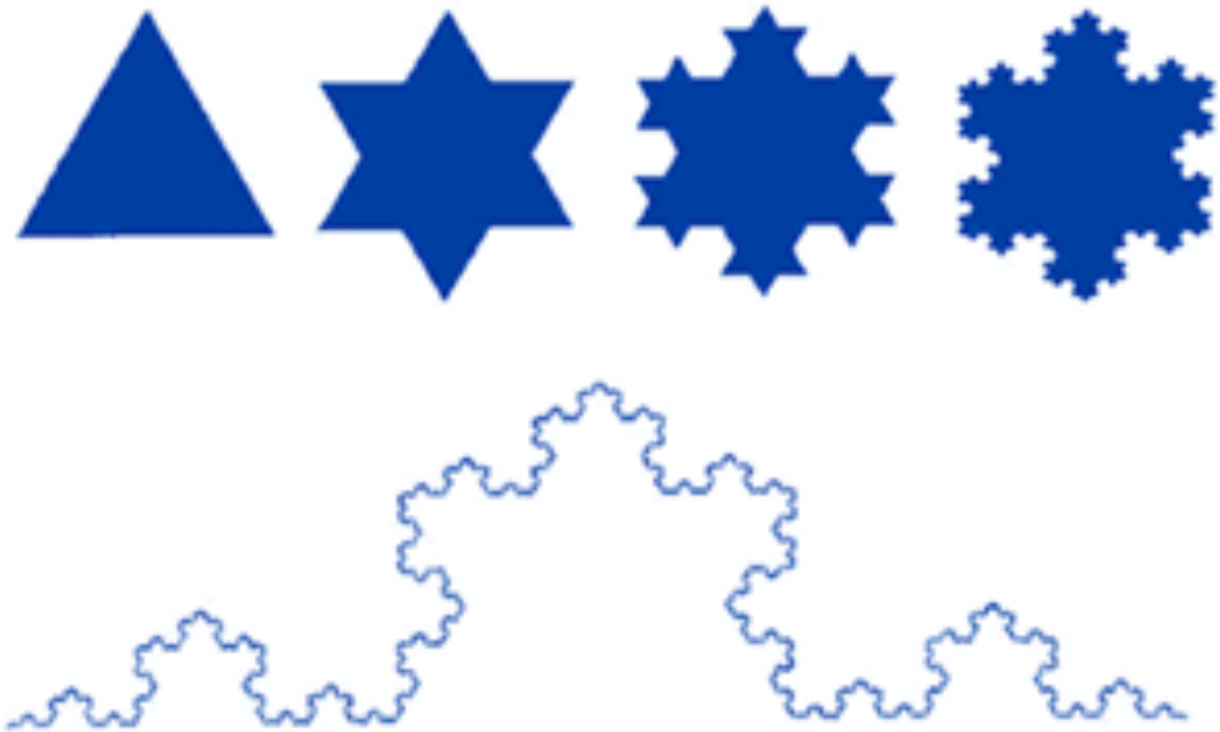
Helge von Koch (1870-1924)

mathématicien suédois qui mit en évidence l'une des premières fractales (1904)



Flocon de Von Koch

principe d'auto-similarité



dimension fractale

Pour cette étude nous retiendrons comme dimension fractale la formule de **Minkowski - Bouligand**

où N(e) désigne le plus grand nombre de points x_k successifs de la courbe équidistants de $e=|x_{k+1} - x_k|$.

$$d=\lim_{e\to 0}\frac{\log N(e)}{\log(\frac{1}{e})}$$

Dans le cas où la fractale est formée de N répliques avec un rapport d'homothétie h (auto-similarité) la formule se simplifie :

$$d=\frac{\log(N)}{\log\frac{1}{h}}$$

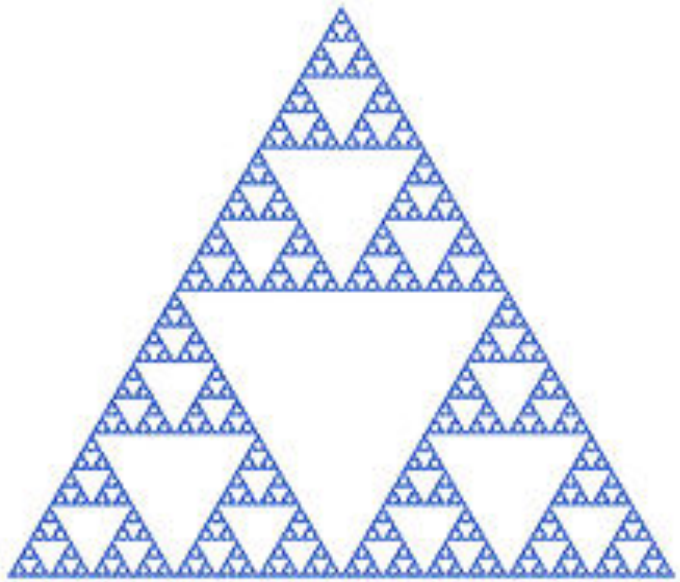
la dimension fractale de la courbe de Von Koch vaut **log4/log3**

ensemble de Cantor

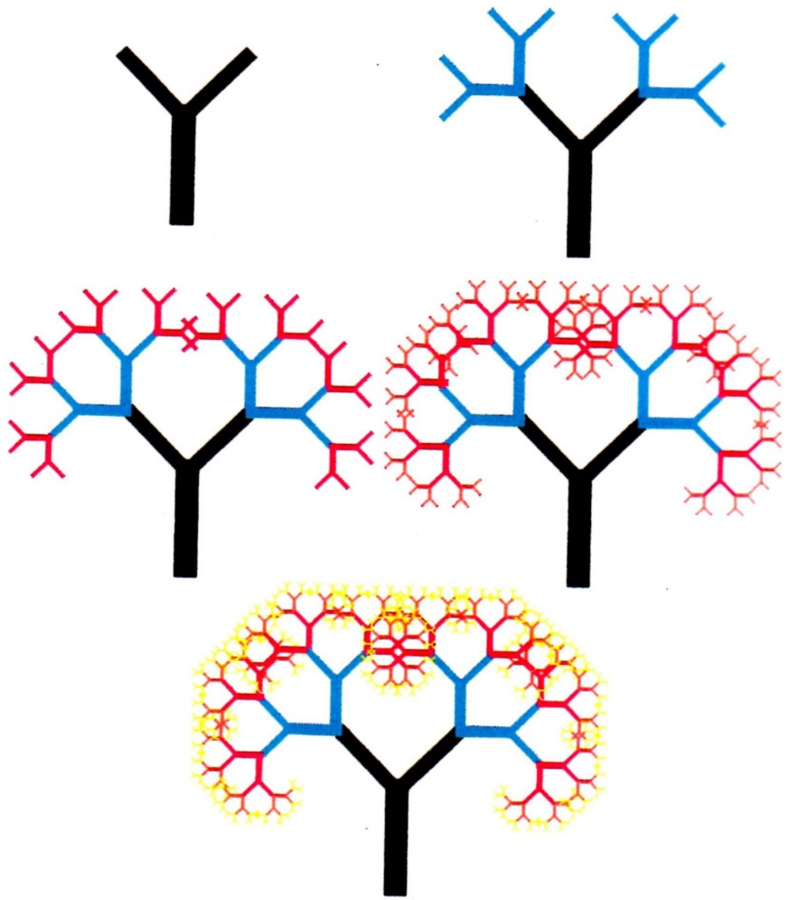
dimension fractale log(2)/log(3)

Triangle de Sierpinski

dimension fractale log3/log2



arbre fractal



Ensembles de Julia

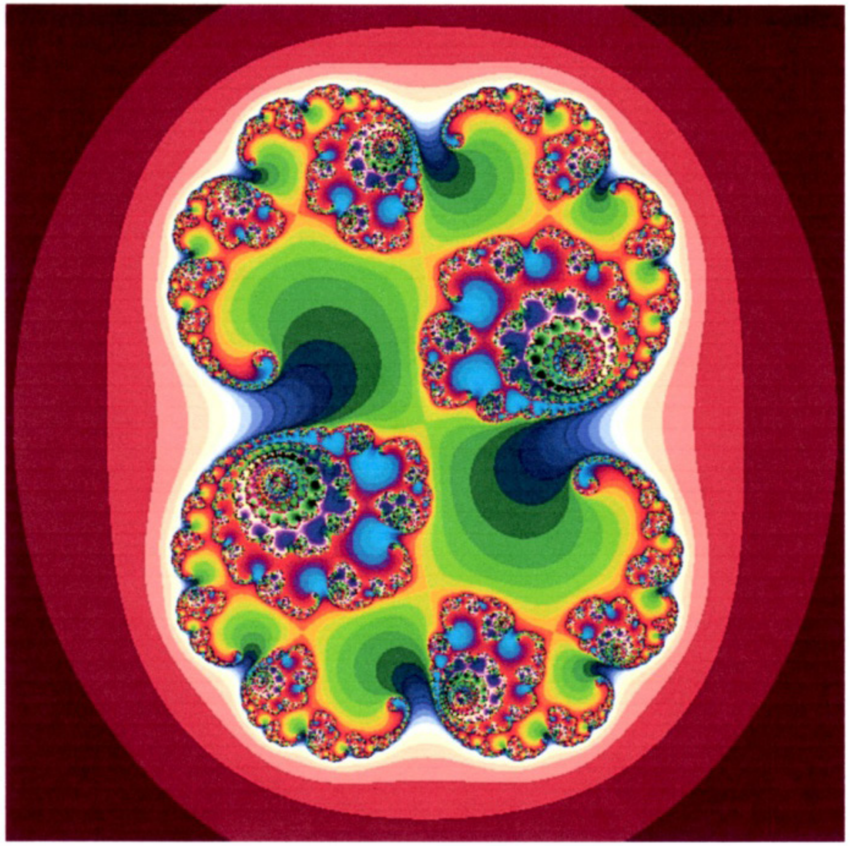
Ce sont des ensembles associés à la fonction $\mathbf{f(z)=z^2 + c}$ où **c** est une constante complexe.

Un ensemble de Julia **J(c**) est constitué des points $\mathbf{z_0}$ (valeur initiale) tels que la suite définie par $\mathbf{z_{n+1} = f(z_n)}$ soit bornée. La constante **c** étant fixée.

$$J(c) = \{ z_0 \mid z_n \text{ est une suite bornée} \}$$

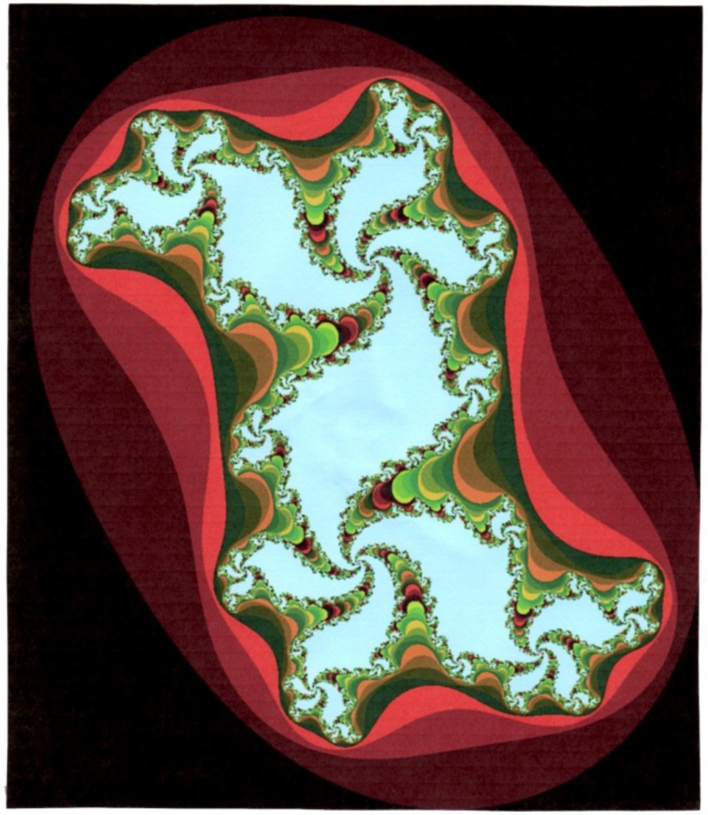
ensemble de Julia

c=0,285 + 0,01i



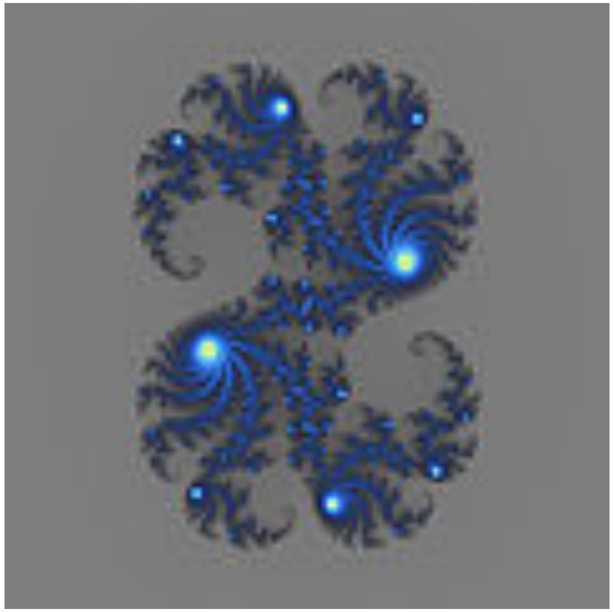
ensemble de Julia

c=0,3 + 0,5i



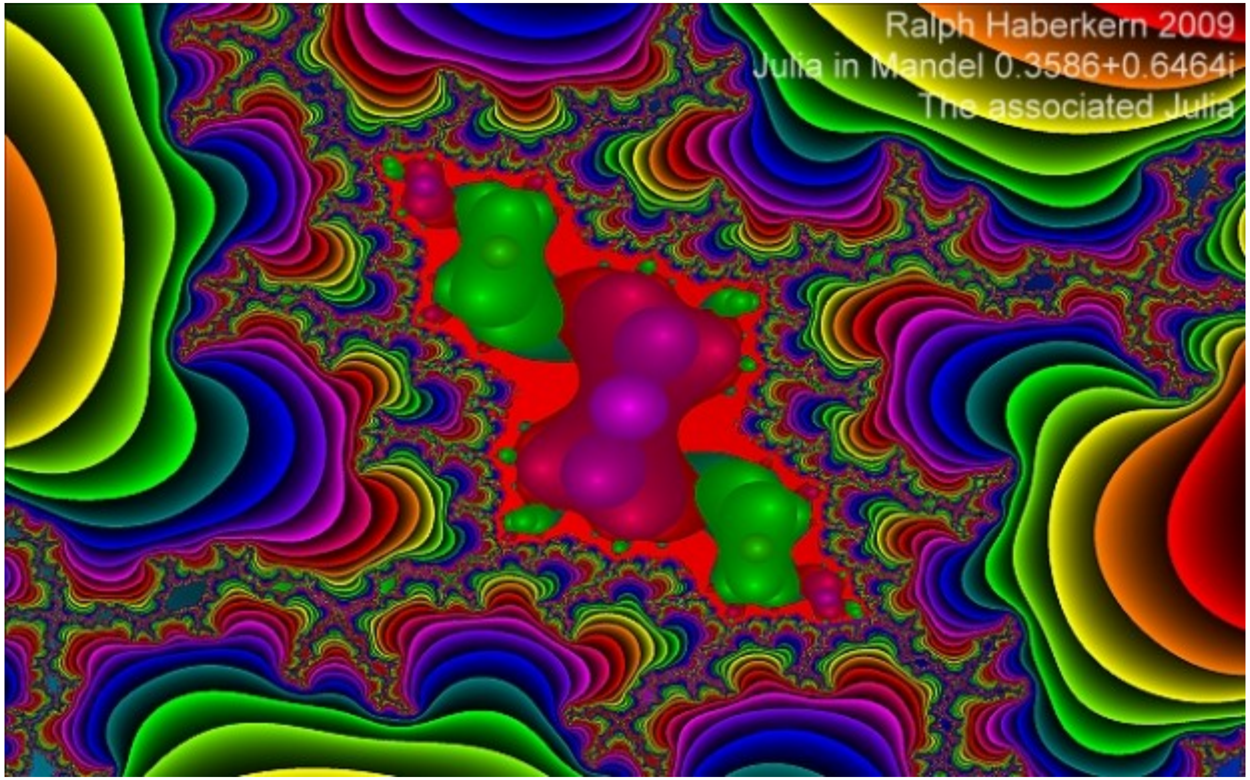
ensemble de Julia

c=0,285 + 0,013i



ensemble de Julia

c=0,3586 + 0,6464i



Mandelbrot

(1924-2010)

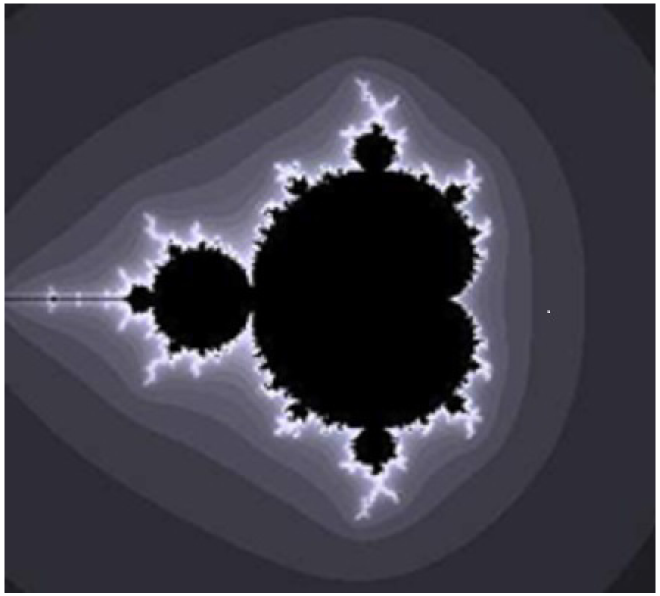
- Mathématicien franco-américain qui a relancé les fractales et développé cette théorie.
- Après un séjour aux USA chez IBM il a au cours de son retour en France fait avancé cette théorie au travers d’exemples pris dans l’environnement à partir des années 1970.
- Son apport s’est concrétisé par la construction d’un ensemble **M** qui porte son nom et qui s’appuie sur la même fonction que celle utilisée pour les ensembles de Julia : $\mathbf{f(z) = z^2 + c}$ où l’on suppose que $\mathbf{z_0 = 0}$ et c’est **c** qui varie.

$$\mathbf{M = \{ c \mid z_0 = 0 \,;\, z_n \text{ est une suite bornée} \}}$$

- M est un ensemble compact et connexe dont la frontière est de dimension fractale 2 (Shishikura 1990).
- **M** est contenu dans le disque de centre O et de rayon 2 et contient le disque de centre O et de rayon 1/4.

Ensemble de Mandelbrot

auto-similarité de sa frontière



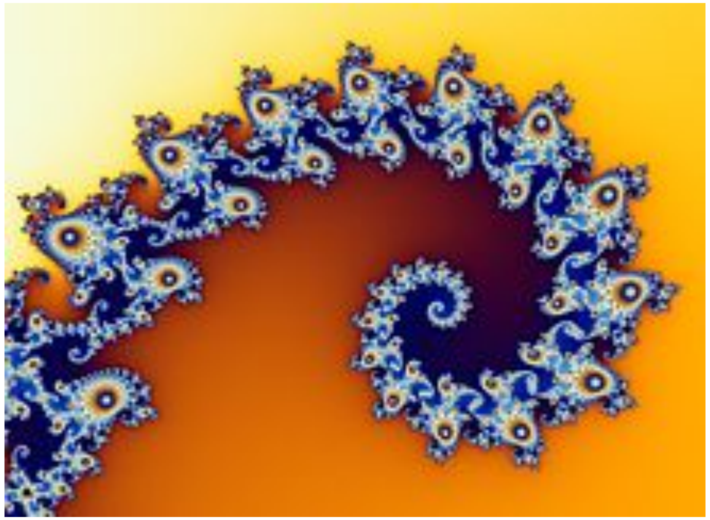
fougère et chou romanesco

applications et interprétation

sur la difficulté de définir un ensemble fractal
l'impossible calcul de la longueur des côtes
médecine : la structure fractale des poumons
botanique
cosmographie : l'univers fractal
les figures fractales ont inspirés de nombreux artistes dont S.Dali ``*Le visage de la guerre*'' et K.Hokusai ``*La Grande Vague*''
ci-dessous une vision fractale de l'univers

FIN

détail de l’ensemble de Mandelbrot



BIBLIOGRAPHIE

- **L'art fractal** aux frontières de l'imaginaire
  Jérémie Brunet (pole Edition)
- **Les objets fractals** forme, hasard et dimension
  Benoit Mandelbrot (Flammarion)
- **Le monde fascinant des objets fractals**
  Florence Messineo (ellipse)
- **Les Fractales en images**
  Nigel Lesmoir-Gordon, Will Rood, Ralph Edney (edp sciences)
- **Les Fractales**
  Art, nature et modélisation (Tangente pole Edition)